NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT

BIND 9 — HEFTE 1–2

OSLO 1961

MUSIKK OG EUKLIDSKE ALGORITMER

VIGGO BRUN

I musikkteorien har følgende fire problemer vært behandlet:

PROBLEM 1. Finn to naturlige tall x og y slik at

$$\frac{\log 2}{x} \approx \frac{\log \frac{3}{2}}{y}. \tag{1}$$

Her betyr $\approx$ »tilnærmet lik«. Tilnærmelsen bør være så god som mulig, uten at x og y blir for store. Det er likegyldig hvilket logaritmesystem vi bruker, da det bare er forholdet mellom de to tellere som har noe å si. Problemet er behandlet av L. Euler i avhandlingen »Tentamen novae theoriae musicae« [8]. Euler benytter seg av kjedebrøken

$$\frac{\log 2}{\log \frac{3}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ddots}}}}$$

og regner ut tilnærmelsesbrøkene

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{12}{7}, \frac{17}{10}, \ldots .$$

Euler har da tatt med også de såkalte »innskutte tilnærmelsesbrøker«, altså de man får når man skriver kjedebrøken som

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + 1 + \ddots}}}}$$

og etterhvert avbryter den foran ett av plusstegnene. Som løsning av (1) finner han da for eksempel $x = 17$, $y = 10$.

Problem 2. Finn tre naturlige tall x, y og z slik at

$$\frac{\log 2}{x} \approx \frac{\log \frac{3}{2}}{y} \approx \frac{\log \frac{5}{4}}{z}. \tag{2}$$

I. M. Barbour har behandlet dette problem i en artikkel »Music and continued fractions« [1] fra 1948. Han benyttet Jacobis generalisering av kjedebrøken; dette er en raskt konvergerende divisjonsalgoritme, som er særlig inngående studert av O. Perron [10]. Barbour fikk bruk for to modifikasjoner av metoden for å oppnå brukbare løsninger. I en artikkel [3] med samme tittel som Barbours viste jeg i 1950 at den generalisering av kjedebrøken [2] som jeg hadde innført i 1919 førte frem ved langt enklere midler.

Problem 3. Finn fire naturlige tall x, y, z og u slik at

$$\frac{\log 2}{x} \approx \frac{\log \frac{7}{4}}{y} \approx \frac{\log \frac{6}{4}}{z} \approx \frac{\log \frac{5}{4}}{u}. \tag{3}$$

A. D. Fokker har i 1947 behandlet denne relasjonen [9]. Han nevner (s. 27) løsningene

$$x = 31, \quad y = 25, \quad z = 18, \quad u = 10,$$

og tilføyer:

»Nous retrouvons le tempérament de Huygens avec trente-et-un cinquièmes de tons dans l'octave. Cette méthode est empirique. Les mathématiques peuvent fournir une méthode directe pour trouver des approximations en nombres entiers du rapport de *deux* nombres irrationnels. Le problème de trois, ou même de quatre nombres irrationnels à la fois dépasse de loin les forces des mathématiciens d'aujourd'hui.«

Problem 4. I en brevveksling med meg fra desember 1960 har Fokker også stillet problemet: Finn fem naturlige tall x, y, z, u og v slik at

$$\frac{\log 2}{x} \approx \frac{\log \frac{14}{8}}{y} \approx \frac{\log \frac{12}{8}}{z} \approx \frac{\log \frac{11}{8}}{u} \approx \frac{\log \frac{10}{8}}{v}. \tag{4}$$

Jeg skal her behandle disse fire problemer under samme synsvinkel, idet jeg benytter den generalisering av den Euklidske subtraksjonsalgoritme som jeg foreslo i 1919 og har ført videre i 1957 [4] og i 1959 [5].

Utvidelsen av Euklids algoritme til å gjelde tre tall er forholdsvis fullstendig behandlet av meg og også av N. Pipping [11]. Sammenlign også M. Davids arbeide [6]. Utvidelsen til å gjelde fire tall er mindre fullstendig behandlet av meg [4] mens utvidelsen til å gjelde flere enn fire tall er helt utilfredsstillende behandlet [2]. Her står meget tilbake å gjøre. Særlig ville det være viktig å studere graden av approksimasjon, som bare er helt ut kjent ved Euklids algoritme for to tall.

Jeg begynner med å studere problem 1. Den løsning jeg her skal gi faller helt sammen med den Euler ga. Jeg gir bare Euklids algoritme — som jo er ensbetydende med kjedebrøksutviklingen — en ny form, idet jeg gir algoritmen som en rekke subtraksjoner og ikke som en rekke divisjoner. Dette har to fordeler. For det første opptrer da de »innskutte tilnærmelsesbrøker« som likeverdige med de vanlige tilnærmelsesbrøker, mens de »innskutte« ved kjedebrøksutviklingen er alt for anonyme. For det annet blir da algoritmen brukbar til generalisering, hvilket neppe kan sies om divisjonsalgoritmen. Det er også verd å legge merke til at Euklid selv, i sine Elementer [7], bare benytter seg av subtraksjon og ikke av divisjon. Jeg gir da Euklids algoritme følgende form:

Gitt to reelle positive størrelser a og b med $a > b$, og de fire naturlige tall x_1, y_1 og x_2, y_2. Jeg erstatter skjemaet

$$\begin{array}{c|cc} a & x_1 & y_1 \\ b & x_2 & y_2 \\ \hline \end{array}$$

med skjemaet

$$\begin{array}{c|cc} a-b & x_1 & y_1 \\ b & x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ \hline \end{array}$$

Hvis her $a-b>b$, som jeg betegner som tilfellet α, kan regnestykket gjentas. Hvis derimot $a-b<b$, som jeg betegner som tilfellet β, må første linje bytte plass med annen linje for at det største av tallene $a-b$ og b kan komme øverst. Hvis $a-b=b$ stanser algoritmen opp.

Algoritmen begynner ved Eulers eksempel med verdiene

$$a = \log 2 = 0{,}3010, \quad b = \log \tfrac{3}{2} = 0{,}1761\,,$$

når vi nøyer oss med fire desimaler. Som begynnelsesverdier for (x_1, y_1) og (x_2, y_2) velges $(1, 0)$ og $(0, 1)$. Regnestykket ser da slik ut:

		0,3010	1	0			
		0,1761	0	1			
1	β	0,1249	1	0	0,1761	1	1
		0,1761	1	1	0,1249	1	0
1	β	0,0512	1	1	0,1249	2	1
		0,1249	2	1	0,0512	1	1
2	α	0,0737	2	1			
		0,0512	3	2			
	β	0,0225	2	1	0,0512	5	3
		0,0512	5	3	0,0225	2	1
2	α	0,0287	5	3			
		0,0225	7	4			
	β	0,0062	5	3	0,0225	12	7
		0,0225	12	7	0,0062	5	3
3	α	0,0163	12	7			
		0,0062	17	10			
	α	0,0101	12	7			
		0,0062	29	17			
	β	0,0039	12	7			
		0,0062	41	24			

Som løsning på problem 1 finner man da for eksempel

$$\frac{\log 2}{17} \approx \frac{\log \frac{3}{2}}{10}\,.$$

Det var den løsning Euler fant. Løsningen

$$\frac{\log 2}{41} \approx \frac{\log \frac{3}{2}}{24}$$

gir bedre approksimasjon, men også større nevnere. Tallene 1, 1, 2, 2 og 3 som er tilføyet er overflødige, men er satt til for å vise sammenhengen med Eulers kjedebrøksutvikling. Tallene angir antall »etasjer« mellom to av de dobbelte vertikalstreker. Som en erstatning for kjedebrøksutviklingen kan man sette bokstavrekken

$$\beta\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta \;\ldots\,.$$

Kjedebrøkens partialnevnere 1, 1, 2, 2, 3 kan man da avlese ved å legge til en ener til antallet av α'er som står foran hvert av bokstavene β.

La oss så se på problem 2, som kan behandles etter en tilsvarende algoritme. La a, b og c være tre reelle positive tall slik at $a > b > c$. Jeg erstatter skjemaet

$$\begin{array}{c|ccc} a & x_1 & y_1 & z_1 \\ b & x_2 & y_2 & z_2 \\ c & x_3 & y_3 & z_3 \\ \hline \end{array}$$

med skjemaet

$$\begin{array}{c|ccc} a-b & x_1 & y_1 & z_1 \\ b & x_1+x_2 & y_1+y_2 & z_1+z_2 \\ c & x_3 & y_3 & z_3 \\ \hline \end{array}$$

Tre tilfeller (α, β eller γ) kan da inntreffe ettersom $a-b$ er størst, mellomst eller minst i det siste skjemaet. Linjene omordnes, om nødvendig, slik at størrelsene $a-b$, b og c blir en synkende tallfølge. Prosessen kan så fortsette.

Ved vårt problem 2 er de tre gitte reelle tall

$$a = \log 2 = 0{,}3010, \quad b = \log \tfrac{3}{2} = 0{,}1761, \quad c = \log \tfrac{5}{4} = 0{,}0969\,.$$

Begynnelsen av algoritmen får da dette forløpet:

$$\begin{array}{r|ccc} 0{,}3010 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1761 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}0969 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\beta \quad \begin{array}{r|ccc} 0{,}1249 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1761 & 1 & 1 & 0 \\ 0{,}0969 & 0 & 0 & 1 \end{array} \;\Bigg\| \; \begin{array}{r|ccc} 0{,}1761 & 1 & 1 & 0 \\ 0{,}1249 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}0969 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma \quad \begin{array}{r|ccc} 0{,}0512 & 1 & 1 & 0 \\ 0{,}1249 & 2 & 1 & 0 \\ 0{,}0969 & 0 & 0 & 1 \end{array} \;\Bigg\| \; \begin{array}{r|ccc} 0{,}1249 & 2 & 1 & 0 \\ 0{,}0969 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}0512 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma \quad \begin{array}{r|ccc} 0{,}0280 & 2 & 1 & 0 \\ 0{,}0969 & 2 & 1 & 1 \\ 0{,}0512 & 1 & 1 & 0 \end{array} \;\Bigg\| \; \begin{array}{r|ccc} 0{,}0969 & 2 & 1 & 1 \\ 0{,}0512 & 1 & 1 & 0 \\ 0{,}0280 & 2 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\beta \quad \begin{array}{r|ccc} 0{,}0457 & 2 & 1 & 1 \\ 0{,}0512 & 3 & 2 & 1 \\ 0{,}0280 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Hvis regnestykket fortsettes, får man etterhvert bokstavrekken

$$\beta\gamma\gamma\beta\gamma\beta\beta\beta\gamma\gamma\beta\gamma\ \ldots,$$

og for størrelsene x, y og z talltriplene

$$(5)\quad \begin{cases} (2,1,1),\ (3,2,1),\ (5,3,2),\ (7,4,2),\ (12,7,4),\ (19,11,6), \\ (31,18,10),\ (34,20,11),\ (53,31,17),\ (87,51,28),\ \text{etc.} \end{cases}$$

Som en løsning på problem 2 får man da for eksempel

$$\frac{\log 2}{31} \approx \frac{\log \frac{3}{2}}{18} \approx \frac{\log \frac{5}{4}}{10},$$

eller utregnet

$$971\cdot 10^{-5} \approx 978\cdot 10^{-5} \approx 969\cdot 10^{-5}.$$

Metoden lar seg uten videre overføre til fire tall. Skjemaet

$$\begin{array}{c|cccc} a & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ b & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ c & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ d & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \end{array}$$

overføres da til skjemaet

$$\begin{array}{c|cccc} a-b & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ b & x_1+x_2 & y_1+y_2 & z_1+z_2 & u_1+u_2 \\ c & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ d & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \end{array}$$

hvoretter linjene om nødvendig omordnes slik at tallfølgen $a-b$, b, c, d blir synkende.

I problem 3 er de gitte reelle tall

$$a = \log 2 = 0{,}3010, \quad b = \log \tfrac{7}{4} = 0{,}2430, \quad c = \log \tfrac{6}{4} = 0{,}1761,$$
$$d = \log \tfrac{5}{4} = 0{,}0969.$$

Begynnelsesverdiene for (x, y, z, u) er da

$$(1, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 0) \quad \text{og} \quad (0, 0, 0, 1).$$

Algoritmen gir etterhvert følgende kvadrupler for x, y, z og u:

$$(6)\quad \begin{cases} (2,2,2,1),\ (3,3,2,1),\ (4,3,2,1),\ (5,4,3,2),\ (9,7,5,3), \\ (13,10,7,4),\ (15,12,9,5),\ (18,15,11,6),\ (31,25,18,10), \\ (35,28,20,11),\ (53,43,31,17),\ (68,55,40,22),\ \text{etc.} \end{cases}$$

Vi får for eksempel følgende løsning på problem 3:

$$\frac{\log 2}{31} \approx \frac{\log \frac{7}{4}}{25} \approx \frac{\log \frac{6}{4}}{18} \approx \frac{\log \frac{5}{4}}{10},$$

eller

$$9711\cdot 10^{-6} \approx 9722\cdot 10^{-6} \approx 9782\cdot 10^{-6} \approx 9691\cdot 10^{-6}.$$

La oss til slutt studere problem 4. Her er begynnelsesverdiene

$$\log 2 = 0{,}30103, \quad \log \tfrac{14}{8} = 0{,}24304, \quad \log \tfrac{12}{8} = 0{,}17609\,,$$
$$\log \tfrac{11}{8} = 0{,}13830, \quad \log \tfrac{10}{8} = 0{,}09691\,.$$

Algoritmen gir her følgende sett av løsninger (x, y, z, u, v):

$$(7)\quad \begin{cases} (4, 3, 2, 2, 1),\ (5, 4, 3, 2, 1),\ (6, 5, 4, 3, 2),\ (9, 7, 5, 4, 3), \\ (15, 12, 9, 7, 5),\ (17, 14, 10, 8, 6),\ (22, 18, 13, 10, 7), \\ (37, 30, 22, 17, 12),\ (41, 33, 24, 19, 13),\ (63, 51, 37, 29, 20), \\ (72, 58, 42, 33, 23),\ \text{etc.} \end{cases}$$

Som løsning på problem 4 får vi da for eksempel

$$\frac{\log 2}{41} \approx \frac{\log \frac{14}{8}}{33} \approx \frac{\log \frac{12}{8}}{24} \approx \frac{\log \frac{11}{8}}{19} \approx \frac{\log \frac{10}{8}}{13}\,,$$

eller utregnet

$$7341 \cdot 10^{-6} \approx 7365 \cdot 10^{-6} \approx 7337 \cdot 10^{-6} \approx 7279 \cdot 10^{-6} \approx 7454 \cdot 10^{-6}\,.$$

Approksimasjonen blir bedre, men nevnerne større, ved løsningen

$$\frac{\log 2}{72} \approx \frac{\log \frac{14}{8}}{58} \approx \frac{\log \frac{12}{8}}{42} \approx \frac{\log \frac{11}{8}}{33} \approx \frac{\log \frac{10}{8}}{23}\,,$$

eller utregnet

$$4181 \cdot 10^{-6} \approx 4190 \cdot 10^{-6} \approx 4193 \cdot 10^{-6} \approx 4191 \cdot 10^{-6} \approx 4213 \cdot 10^{-6}\,.$$

Avvikelsene fra middelverdien av disse fem tallene beløper seg til mindre enn en halv prosent av middelverdien for samtlige fem tall.

Til tross for at det teoretiske grunnlag for disse Euklidske algoritmer ennå er utilstrekkelig behandlet, viser det seg altså ved disse eksempler at man med fordel kan bruke algoritmene til å løse slike musikkteoretiske problemer.

Jeg tilføyer at den algoritme jeg har benyttet ikke er den eneste mulige. Ved problem 2 hvor det var oppgitt tre tall a, b og c, hvor $a > b > c$, erstattet jeg disse tre med $a-b$, b og c. Man kan også velge en annen algoritme, idet man erstatter a, b og c med $a-c$, b og c. Bruker man begge algoritmer *samtidig* får man de to algoritmer

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{a} \\ \multicolumn{2}{c}{b} \\ \multicolumn{2}{c}{c} \\ \hline a-b & a-c \\ b & b \\ c & c \end{array}$$

Begge de to nye talltripler kan da, etter at leddene er omordnet så de blir synkende, behandles på samme vis som det opprinnelige talltrippel. Man får da den *forgrenete* kjedebrøk som Pipping har studert i en rekke artikler [11]. Forgreningen gjør at algoritmen blir mindre brukbar i mange tilfeller. Men når det gjelder disse musikkteoretiske problemer vil muligens regningene bli overkommelige.

Man kan også, som E. Selmer har gjort det, bare erstatte a, b og c med $a-c$, b og c. Han behandler dette nærmere i det etterfølgende arbeid [12].

LITTERATUR

[1] I. M. BARBOUR: *Music and continued fractions.* Amer. Math. Monthly 55 (1948), pp. 545–551.

[2] V. BRUN: *En generalisation av kjedebrøken* (avec un résumé en français) I og II. Videnskabsselskapets skrifter, Mat.-Nat. Klasse, Oslo 1919 Nr. 6, og 1920 Nr. 6.

[3] V. BRUN: *Music and ternary continued fractions.* Kgl. norske vid. selsk. Forh., Bd. 23 (1950), Nr. 10.

[4] V. BRUN: *Algorithmes Euclidiens pour trois et quatre nombres.* XIII Congr. Math. Scand. (1957), pp. 45–64.

[5] V. BRUN: *Mehrdimensionale Algorithmen, welche die Eulersche Kettenbruchentwicklung der Zahl e verallgemeinern.* Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers, pp. 87–100. Akademie-Verlag, Berlin 1959.

[6] M. DAVID: *Contribution à l'étude algorithmique des approximations rationelles simultanées de deux irrationnels.* Publ. Sci. Univ. Alger, Ser. A, Tome III (1956).

[7] EUKLID: *Elementer.* Bok VII, 2 og Bok X, 3.

[8] L. EULER: *Opera omnia.* Series III, Vol. I, p. 197.

[9] A. D. FOKKER: *Les mathématiques et la musique.* Archives du musée Teyler. M. Nijhoff, La Hage 1947, pp. 21–31.

[10] O. PERRON: *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenalgorithmus.* Math. Ann. 64 (1907), pp. 1–76.

[11] N. PIPPING: *Approximation zweier reellen Zahlen durch rationale Zahlen mit gemeinsamen Nenner.* Acta Açad. Aboensis, Mathematica et Physica XXI, 1, Åbo 1957.

[12] E. S. SELMER: *Om flerdimensjonal kjedebrøk.* NMT 9 (1961), pp. 37–43.